

## МЕТОД КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ В ТЕОРИИ ДВУМЕРНЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ<sup>1</sup>

### Аннотация.

*Актуальность и цели.* Разработка методов построения точных решений квантовых уравнений является одной из важных технических задач в области квантовой физики. Точные решения дают возможность не только проводить анализ систем во всех тонкостях, но служат основой для большого числа уже приближенных систем в качестве нулевого приближения. С современной точки зрения особый интерес представляют квантовые системы в размерности пространства 2 и 3, для которых имеется не так много методов построения точных решений. Поэтому отыскание подходов, которые позволяют проанализировать не одну конкретную систему, а несколько систем, пользуясь одной и той же процедурой построения решений, является актуальной задачей. Целью настоящей работы является построение новых точных решений двумерных квантовых систем, обладающих специальными свойствами симметрии, которые можно в дальнейшем использовать в качестве основы для анализа квантовых систем в теории наноматериалов.

*Материалы и методы.* В работе для построения точных решений уравнений двумерных квантовых систем используется метод конформных отображений двумерного координатного пространства в себя. Двумерное координатное пространство представляется комплексной плоскостью. С помощью конформных отображений комплексной плоскости решается несколько задач о динамике классической квантовой частицы без спина в двумерных потенциальных ямах. Конформные отображения связывают точно решаемые квантовые задачи такие, как двумерный гармонический осциллятор с квантовыми задачами о движении частиц в каналах. В работе приводится анализ применения двух основных типов конформных отображений, позволяющих строить полное решение новой квантовой задачи на основе решения известной задачи, например такой, как квантовый двумерный осциллятор. При построении точных решений квантовых уравнений метод конформных отображений сочетается с методом преобразований Дарбу, что расширяет класс систем, для которых удастся построить точные решения.

*Результаты.* В результате использование конформных отображений расширяет список методов, с помощью которых удастся получить точные решения новых квантовых задач, которые могут служить моделями для некоторых реальных квантовых систем. Построенные с помощью конформных отображений системы дают примеры квантовых систем, в которых волновая функция частицы строится одновременно во всем пространстве, хотя потенциальная энергия такова, что частица может находиться лишь в одной из областей пространства, которые отделены друг от друга непроницаемыми потенциальными барьерами. В работе приводятся примеры таких систем и анализируются некоторые их основные свойства. Этот результат имеет отношение к проблеме Ааронова – Бома.

*Выводы.* Метод конформных отображений может с успехом использоваться в качестве одного из методов построения решений квантовых систем с помощью переноса известных результатов относительно одних квантовых си-

<sup>1</sup> Работа выполнена при частичной поддержке Министерства образования и науки РФ.

стем на другие. Полученные результаты могут быть использованы для анализа реальных квантовых систем в качестве нулевого приближения.

**Ключевые слова:** конформные отображения, двумерные квантовые системы, метод преобразований Дарбу.

V. M. Zhuravlev, V. M. Morozov

## METHOD OF CONFORMAL MAPPINGS IN THE THEORY OF TWO-DIMENSIONAL QUANTUM SYSTEMS

### **Abstract.**

*Background.* Development of methods for constructing exact solutions of the quantum equations is one of the major technical challenges in the field of quantum physics. Exact solutions enable not only to analyze the systems in all the subtleties, but serve as the basis for a large number of systems that are already close to zero-order approximation. From the modern point of view, of special interest are quantum systems in space dimension 2 and 3, for which there aren't many methods for constructing exact solutions. Therefore, the search for approaches that provide insights not into one particular system, but several systems, using the same procedure for constructing solutions, is an urgent task. The purpose of this paper is to construct new exact solutions of two-dimensional quantum systems with special symmetry properties, which can then be used as a basis for the analysis of quantum systems in the theory of nanomaterials.

*Materials and methods.* In this study, to construct exact solutions of the equations of two-dimensional quantum systems the authors used the method of conformal mappings of two-dimensional coordinate space into itself. The two-dimensional coordinate space is represented by a complex plane. With the help of conformal mappings of the complex plane the researchers solved several problems of classical dynamics of a quantum particle without a spin in two-dimensional potential wells. Conformal mappings bound exactly solvable quantum problems such as the two-dimensional harmonic oscillator with the quantum problem of the motion of particles in the channels. The authors present an analysis of the use of two basic types of conformal mappings, allowing to build a complete solution to the new problem on the basis of solution to the known problem, for example, such as a two-dimensional quantum oscillator. In construction of exact solutions of quantum equations the conformal mapping method is combined with the method of Darboux transformations, which expands the class of systems for which it is possible to construct exact solutions.

*Results.* As a result, the use of conformal mapping extends the list of methods by which it is possible to obtain exact solutions of new quantum problems that can serve as models for some real quantum systems. The systems, constructed with the help of conformal mapping, provide examples of quantum systems in which the particle wave function is constructed at the same time in the whole space, while the potential energy is such that the particle can only be in one of the regions of space that are separated by impenetrable potential barriers. The paper gives examples of such systems and examines some of their basic properties. This result is related to the problem of the Aharonov-Bohm effect.

*Conclusions.* Conformal mappings can be successfully used as a method of constructing solutions of quantum systems using the known results concerning the transfer of certain quantum systems on the other. The results can be used to analyze the actual quantum systems as a zero approximation.

**Key words:** conformal mapping, two-dimensional quantum systems, method of Darboux transformations.

### Введение

Классическими задачами квантовой механики, не утратившими своего значения до настоящего времени, являются задачи о динамике одной частицы в определенном типе внешних полей. Такие задачи встречаются в теории квантовых состояний физики конденсированного состояния и связаны с развитием теории наносистем. При анализе таких задач важное значение играет возможность проанализировать используемую модель квантовой системы точно. В этом случае появляется возможность глубокого понимания того, что происходит в квантовой системе при изменениях в ее структуре. Вместе с тем, как хорошо известно, точно решаемые задачи о динамике даже одной частицы являются исключением и отыскание каких-либо новых, точно решаемых задач в этом случае оказывается важным элементом анализа той или иной системы. В частности, почти нет полезных, точно решаемых задач динамики частицы в периодических полях, что важно с точки зрения теории движения частиц в кристаллах.

Известными методами построения решений квантовых уравнений Шредингера являются методы, основанные на преобразованиях Дарбу, которые первоначально использовались в работах Баргмана для построения безотражательных потенциалов [1]. Это направление впоследствии интенсивно развивалось и привело к разработке ряда полезных методов анализа квантовых систем [2]. Однако данный подход, хотя и применим к двумерным и трехмерным квантовым системам, однако лишь в том случае, если в них удастся разделить переменные. Вместе с тем квантовые уравнения в некотором смысле близки к гидродинамическим системам. Поэтому для анализа квантовых систем можно использовать некоторые методы, используемые с успехом в гидродинамике. В частности, для описания двумерных гидродинамических потоков часто используют конформные отображения [3]. Этим методом можно воспользоваться для отыскания решений некоторых двумерных квантовых систем, конформно связанных с системами, решение которых хорошо известно. Еще одной областью, где конформные отображения могут сыграть достаточно важную роль, является проблема эффекта Ааронова – Бома [4]. Это связано с тем, что при конформных отображениях комплексная плоскость может отображаться на несвязные подобласти комплексной плоскости. В результате решение, которое до отображения существовало на всем двумерном пространстве, после отображения может описывать квантовые объекты в несвязанных областях. При этом потенциал будет задаваться единым образом на всем пространстве в целом. Но в данной работе мы не будем детально касаться проблемы эффекта Ааронова – Бома. В настоящей работе с помощью конформных отображений мы строим и исследуем точные решения некоторых интересных с прикладной точки зрения задач динамики одной квантовой частицы. Данный метод может сочетаться с методом преобразований Дарбу, что расширяет класс интегрируемых квантовых систем. Некоторые результаты такого типа излагаются в настоящей работе.

#### 1. Двумерный квантовый осциллятор и частица в двумерном кулоновском поле

В качестве первого примера, доказывающего практическую важность конформных отображений для анализа квантовых систем, рассмотрим дву-

мерный квантовый осциллятор и покажем ее связь с другой точно решаемой задачей квантовой теории – с задачей о квантовой частице в двумерном кулоновском потенциале. Уравнение Шредингера движения квантовой частицы массой  $\mu$  в двумерном кулоновском потенциале:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta\psi - \frac{\alpha_0}{r}\psi = E\psi. \quad (1)$$

Здесь  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  – двумерный оператор Лапласа.

Потенциальная энергия  $U(r) = \alpha_0 / r$  соответствует заряженной нити с плотностью распределения заряда в плоскости, перпендикулярной нити. В дальнейшем будем называть такой потенциал потенциалом кулоновской нити. Перейдем в записи уравнения (1) к комплексным координатам на плоскости:  $z = x + iy$ ,  $z^* = x - iy$ . В этом случае оператор Лапласа может быть записан в виде

$$\Delta = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial z^*}, \quad (2)$$

а уравнение (1) примет следующий вид:

$$-\frac{2\hbar^2}{m} \frac{\partial^2}{\partial z \partial z^*} \Phi - \frac{\alpha_0}{\sqrt{z} \sqrt{z^*}} \Phi = E\Phi, \quad (3)$$

где  $\Phi(z, z^*, E) = \psi(x, y, E)$ . Преобразуем последнее уравнение с помощью замены переменной  $z \rightarrow \zeta(z) = 2|E|^{1/4} \sqrt{z}$  к виду

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \zeta^*} \Psi - \tilde{E} \Psi = -4\zeta \zeta^* \Psi, \quad (4)$$

где

$$\Psi(\zeta, \zeta^*, \tilde{E}) = \Phi(z, z^*, E), \quad \tilde{E} = \frac{4\alpha_0}{|E|^{1/2}}.$$

Знак « $\rightarrow$ » в правой части данного уравнения учитывает знак энергии квантовых уровней частицы в кулоновской яме.

Замена комплексных переменных  $z \rightarrow \zeta(z)$  представляет собой конформное отображение плоскости  $(x, y)$  в себя с новыми вещественными координатами  $(X, Y)$ , связанными со старыми соотношениями:

$$X = \frac{1}{2}(\zeta(z) + \zeta^*(z)), \quad Y = \frac{1}{2i}(\zeta(z) - \zeta^*(z)). \quad (5)$$

Наиболее ценным в таком преобразовании является то, что уравнение (4), полученное в результате данного конформного отображения, представля-

ет собой уравнение Шредингера двумерного гармонического осциллятора с собственной частотой  $\Omega = 2\sqrt{2/m}$ :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2}\right)\varphi + 4(X^2 + Y^2)\varphi = \tilde{E}\varphi, \quad (6)$$

где  $\varphi(X, Y, \tilde{E}) = \Psi(\zeta, \zeta^*, \tilde{E})$ . Исходя из того, что энергетический спектр двумерного гармонического осциллятора с собственной частотой  $\Omega$  хорошо известен и равен

$$\tilde{E} = \hbar\Omega(n+1), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

находим спектр частицы в двумерном кулоновском поле:

$$|E|^{1/2} = \frac{4\alpha_0}{\hbar\Omega(n+1)},$$

или

$$E = -\frac{2\alpha_0^2 m}{\hbar^2} \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Волновые функции квантовых состояний частицы в двумерном кулоновском потенциале хорошо известны и имеют вид

$$\varphi_{k,m}(X, Y) = H_k(X)H_m(Y)e^{-R^2/2R_0^2},$$

где  $H_n(X)$  – полиномы Эрмита;  $R^2 = X^2 + Y^2$ ,  $R_0 = \sqrt{\hbar/m\Omega} = \sqrt{\hbar/2\sqrt{2}m}$ . Числа  $n$  и  $m$  представляют собой номера парциальных квантовых уровней гармонического осциллятора по координатам  $X$  и  $Y$  соответственно, причем  $n = k + m$ , так что кратность вырождения уровней двумерного квантового гармонического осциллятора совпадает с кратностью вырождения уровней частицы в двумерном кулоновском потенциале.

## 2. Общий метод конформных отображений для двумерных квантовых систем

Из приведенного примера следует, что имеется возможность строить точные решения уравнений Шредингера некоторых квантовых систем, если эти уравнения могут быть связаны конформным отображением с уравнением Шредингера одной из систем, для которых известны точные решения. Общую схему такого подхода можно сформулировать следующим образом. Уравнение Шредингера квантовой частицы в двумерном квантовом потенциале  $U(x, y)$  имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + U(x, y)\psi = E\psi. \quad (7)$$

Производя переход к комплексным координатам  $z, z^*$ , приходим к уравнению

$$-\frac{2\hbar^2}{m} \frac{\partial^2}{\partial z \partial z^*} \Phi + \tilde{U}(z, z^*) \Phi = E \Phi. \quad (8)$$

Производя замену переменных  $z \rightarrow \zeta(z)$ , соответствующую некоторому общему конформному преобразованию комплексной плоскости, приходим к новому уравнению следующего вида:

$$-\frac{2\hbar^2}{m} \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \zeta^*} \Phi + \frac{\tilde{U}(z, z^*)}{w(z)w(z^*)} \Phi = \frac{E}{w(z)w(z^*)} \Phi. \quad (9)$$

Здесь  $\zeta'(z) = w(z)$ ,  $\Psi(\zeta, \zeta^*, E) = \psi(x, y, E)$ . Переходя к новым декартовым координатам  $X, Y$ , имеющим вид (5), получаем новую квантовую систему, волновые функции которой находятся с помощью замены переменных из решений исходного уравнения Шредингера. Уравнение этой системы будет иметь следующий вид:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \right) \varphi + W(X, Y, E) \varphi = \varepsilon \varphi, \quad (10)$$

где

$$W(X, Y, E) = \frac{\tilde{U}(z(X, Y), z^*(X, Y)) - E}{w(z(X, Y))w(z^*(X, Y))} + E,$$

$\varphi(X, Y, E) = \Psi(\zeta, \zeta^*, E)$ ,  $\varepsilon$  – новая энергия. Поскольку новый потенциал не должен зависеть от новой энергии  $\varepsilon$ , то должно выполняться соотношение

$$\begin{aligned} \tilde{U}(z(X, Y), z^*(X, Y)) = & -\varepsilon w(z(X, Y)) \times \\ & \times w(z^*(X, Y)) + W_0(X, Y, E), \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$W_0(X, Y, E) = W(X, Y, E)w(z(X, Y))w(z^*(X, Y)) + E.$$

В результате метод конформных отображений позволяет строить решения для новой квантовой системы, исходя из решений для старой, если исходный потенциал может быть представлен в виде (11) для некоторого преобразования  $\zeta = \zeta(z)$ .

При этом следует учитывать, что границы и граничные условия на них для новой квантовой системы получаются в результате конформного отображения. В силу этого применение граничных условий для новой задачи должно производиться заново.

### 3. Частицы в двумерных каналах

Для того чтобы продемонстрировать полезность такого подхода, рассмотрим пару простых примеров.

### 3.1. Пример 1. Частица в поле заряженной нити

Рассмотрим анизотропный гармонический осциллятор с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Уравнение Шредингера имеет следующий вид:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + \frac{m}{2}(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2)\psi = E\psi.$$

Это уравнение для граничных условий  $\psi \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$  имеет спектр энергии:

$$E_{n_1, n_2} = \frac{\hbar}{2}((2n_1 + 1)\omega_1 + (2n_2 + 1)\omega_2), \quad (12)$$

где  $n_1$  и  $n_2$  – неотрицательные целые числа и волновые функции,

$$\psi_{n_1, n_2} = H_{n_1}(x)H_{n_2}(y)e^{-x^2/2x_0^2 - y^2/2y_0^2}, \quad (13)$$

$H_n(x)$  – полиномы Эрмита,  $x_0 = \sqrt{\hbar / m\omega_1}$ ,  $y_0 = \sqrt{\hbar / m\omega_2}$ .

Представим исходное уравнение в следующем виде:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + \frac{m}{2}(\alpha(x^2 + y^2) + \beta(x^2 - y^2))\psi = E\psi,$$

которое в комплексных координатах может быть записано так:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}4\frac{\partial^2}{\partial z\partial z^*}\psi + (\alpha|z|^2 + \beta(z^2 + z^{*2})/2)\psi = E\psi.$$

Здесь  $\alpha + \beta = m\omega_1^2 / 2$ ,  $\alpha - \beta = m\omega_2^2 / 2$ . Воспользуемся теперь конформным преобразованием следующего вида:

$$z \rightarrow \zeta(z) = z^2 / 2. \quad (14)$$

В результате этого конформного преобразования получаем

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial\zeta\partial\zeta^*}\varphi + \left(\alpha + \beta\frac{\zeta + \zeta^*}{2|\zeta|}\right)\varphi = \frac{E}{2|\zeta|}\varphi.$$

Переходя теперь к вещественным координатам на комплексной плоскости  $\zeta$  по формулам (5), приходим к уравнению

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2}\right)\varphi + 4\left(\alpha + \beta\frac{X}{R}\right)\varphi = \frac{2E}{R}\varphi. \quad (15)$$

Это уравнение представляет собой уравнение Шредингера для частицы в кулоновском потенциале с дополнительным взаимодействием:

$$W = 4\frac{\beta X}{R} = 4\beta\cos\varphi, \quad (16)$$

где  $\varphi$  – азимутальный угол в плоскости  $(X, Y)$ . Подставляя этот потенциал в трехмерное уравнение Пуассона

$$\Delta\varphi = 4\pi\rho,$$

устанавливаем, что потенциал (16) создается распределением заряда следующего вида:

$$\rho = -\frac{\beta \cos \varphi}{\pi R^2}.$$

Роль полной энергии играет величина  $E = -4\alpha = -m(\omega_1^2 + \omega_2^2)$ . При изменении квантовых чисел  $n_1$  и  $n_2$ , для которых точные решения для уравнения Шредингера анизотропного осциллятора имеют вид (13), потенциал в уравнении (15) не должен изменяться. Это требование соответствует двум условиям:

$$E_0 = \frac{\hbar}{2}((2n_1 + 1)\omega_1 + (2n_2 + 1)\omega_2) = \text{const}, \quad 4\beta = m(\omega_1^2 - \omega_2^2) = \text{const}.$$

Решая эту систему относительно  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , находим

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \frac{\Omega_0 - (2n_1 + 1)\omega_1}{2n_2 + 1}, \\ \omega_1 &= \frac{-\Omega_0(2n_1 + 1) \pm \sqrt{\Omega_0^2((2n_1 + 1)^2 + 1) + 4\beta(2n_2 + 1)^2 / m}}{(2n_2 + 1)^2 - (2n_1 + 1)^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь  $\Omega_0 = 2E_0 / m$ . Энергия новой, конформно эквивалентной системы будет иметь следующий вид:

$$E = -4\alpha = -m \frac{\omega_1^2(2n_2 + 1)^2 + (\Omega_0 - 2n_1\omega_1 - 1)^2}{(2n_2 + 1)^2},$$

где  $\omega_1$  вычисляется из соотношений (17). Вид потенциала

$$W(X, Y) = 4\beta \frac{X}{R} - \frac{2E}{R}$$

для значений параметров  $\beta = 400$ ,  $E = 5$  представлен на рис. 1. На график потенциала сплошными черными кривыми нанесены линии уровня потенциала, соответствующие фиксированным энергиям  $E = -250, -200, -150, -50, 0, 50, 100, 150$ .

Спектр энергии такой системы существенно зависит от параметров исходной системы, т.е. от параметра  $E$  и  $\gamma_0$ . На рис. 2 приведены уровни энергии системы для случая  $\Omega_0 = 1$  и  $\gamma_0 = -1$ .

Существенным при анализе энергетических уровней данной системы является знак подкоренного выражения в формуле для  $\omega_1$ :

$$Q = 1 + \gamma_0 4(n_2 - n_1)(n_1 + n_2 + 1).$$

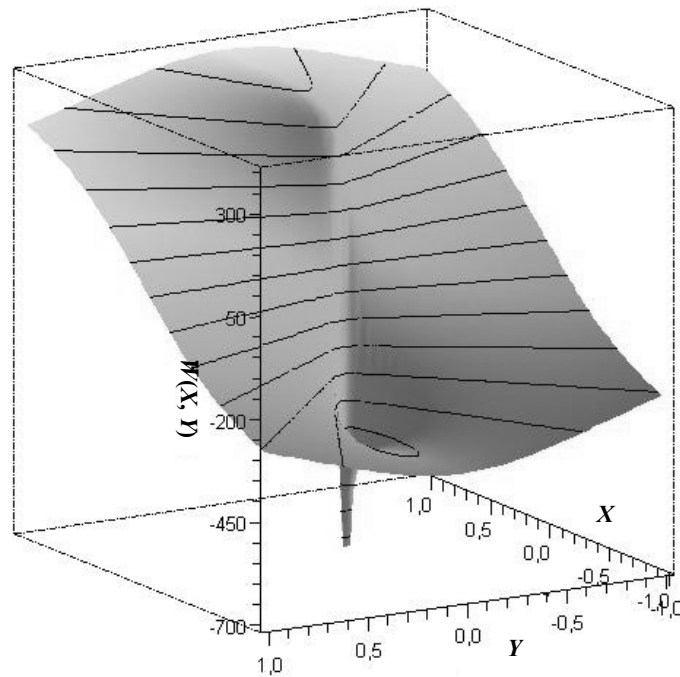


Рис. 1. График потенциальной энергии (15) для значений параметров:  $\beta = 400, E = 5$

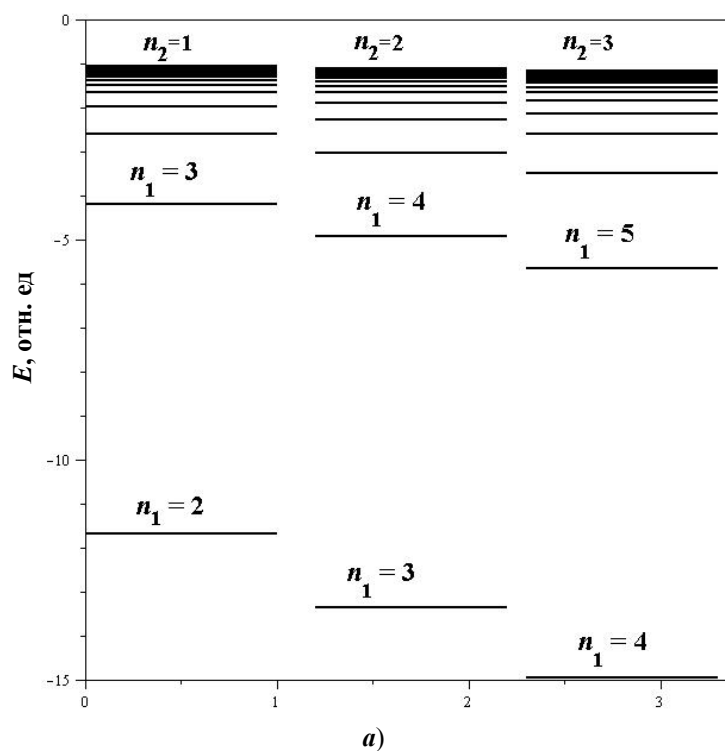
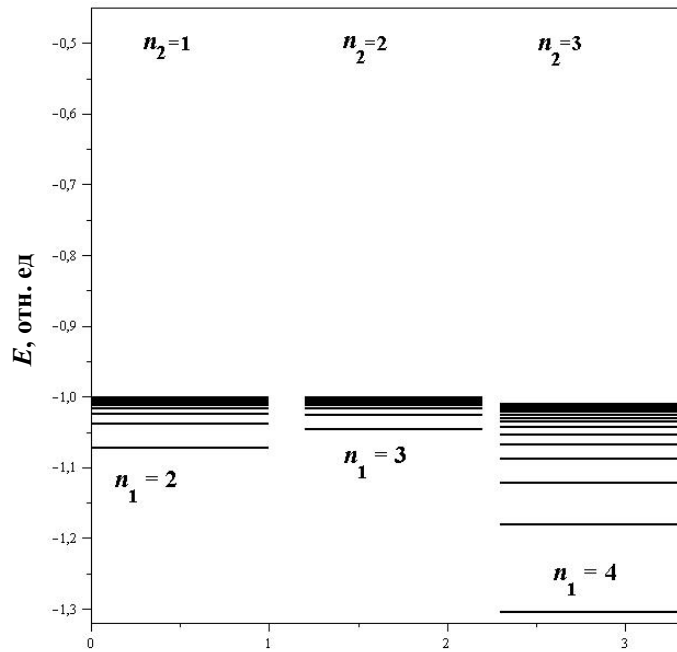


Рис. 2. Расположение энергетических уровней для потенциала (см. на рис. 1) при  $\gamma_0 = 1$  и  $\Omega_0 = 1$ ;  $a$  – серия уровней  $E_+$ ;  $b$  – серия уровней  $E_-$



б)

Рис. 2. Окончание

Условием существования дискретных уровней является требование  $Q > 0$ . Кроме этого, видно, что величина энергии обращается в бесконечность при условии  $n_1 = n_2$ , что запрещает соответствующий уровень. В зависимости от того, какое значение имеет величина  $\gamma_0$ , в системе могут существовать уровни как для случая  $n_1 > n_2$ , так и для случая  $n_1 < n_2$ . Например, при  $\gamma_0 < 0$  существуют все уровни с числами  $n_1 = \{n_2 + 1, n_2 + 2, \dots\}$ . Если при этом  $1/|\gamma| > 4(k_0 - j_0)(k_0 + j_0 + 1)$ , то существуют также уровни энергии  $n_2$ .

### 3.2. Пример 2. Частица в канале

Рассмотрим уравнение Шредингера квантового сингулярного осциллятора, записанное в безразмерных координатах:

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi + (x^2 + y^2)\psi + \frac{\varepsilon}{x^2 + y^2}\psi = E\psi, \quad (18)$$

где  $x = \tilde{x}/l_0$ ,  $y = \tilde{y}/l_0$ ,  $E = \tilde{E}/E_0$ ,  $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}/\varepsilon_0$  а  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$ ,  $\tilde{E}$  – первоначальные координаты и энергия частицы,  $l_0 = \sqrt{\hbar/\mu\omega}$ ,  $E_0 = \hbar\omega/2$ ,  $\varepsilon_0 = 2/\mu\omega^2$ .

Для получения решений уравнения Шредингера удобно записать исходное уравнение в цилиндрических координатах, разделив в уравнении переменные. Уравнение для радиальной волновой функции можно записать в следующей форме:

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial R_n}{\partial r} \right) + r^2 R_n + \frac{m^2 + \varepsilon}{r^2} R_n = E_n R_n, \quad (19)$$

где  $m$  – магнитное квантовое число. Волновые функции двумерного сингулярного осциллятора в цилиндрических координатах имеют вид

$$\Psi_{nm}(r, \varphi) = R_n(r) e^{im\varphi} = \frac{\sqrt{2(n!)}}{\sqrt{\Gamma(n + \tilde{\lambda} + \frac{1}{2})}} L_n^{\tilde{\lambda} - \frac{1}{2}}(r^2) r^{\tilde{\lambda} - \frac{1}{2}} e^{-\frac{r^2}{2} + im\varphi}, \quad (20)$$

где  $L_n^{\tilde{\lambda} - \frac{1}{2}}(r^2)$  – обобщенные полиномы Лагерра [5]:

$$L_n^m(x) = \sum_{p=0}^n \binom{n+m}{n-p} \frac{(-x)^p}{p!}.$$

Соответствующие энергии удовлетворяют следующим соотношениям:

$$E_n = \tilde{\lambda} + \frac{1}{2} + 2n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где

$$\tilde{\lambda} = \frac{1}{2} + \sqrt{2 \left( m^2 + \varepsilon - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{4}}. \quad (21)$$

Запишем уравнение (18) в комплексных координатах на плоскости:

$$z = x + iy, \quad z^* = x - iy:$$

$$-4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial z^*} \Phi + z z^* \Phi + \frac{\varepsilon}{z z^*} \Phi = E \Phi.$$

Умножим получившееся уравнение на  $z z^*$  и сделаем замену переменных  $z = e^\zeta$ , являющуюся конформным отображением комплексной плоскости на полуплоскость. В новых переменных  $\zeta, \zeta^*$  уравнение Шредингера примет следующий вид:

$$-4 \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \zeta^*} \Phi + e^{2\zeta} e^{2\zeta^*} \Phi + \varepsilon \Phi = E e^{\zeta + \zeta^*} \Phi.$$

Чтобы снова вернуться к декартовым координатам, сделаем замену  $\zeta = \xi + i\eta$ , тогда получим уравнение с новым потенциалом:

$$W(\xi, E) = e^{4\xi} - E e^{2\xi}, \quad (22)$$

записанное в декартовых координатах:

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right)\Phi + e^{4\xi}\Phi + \varepsilon\Phi = Ee^{2\xi}\Phi. \quad (23)$$

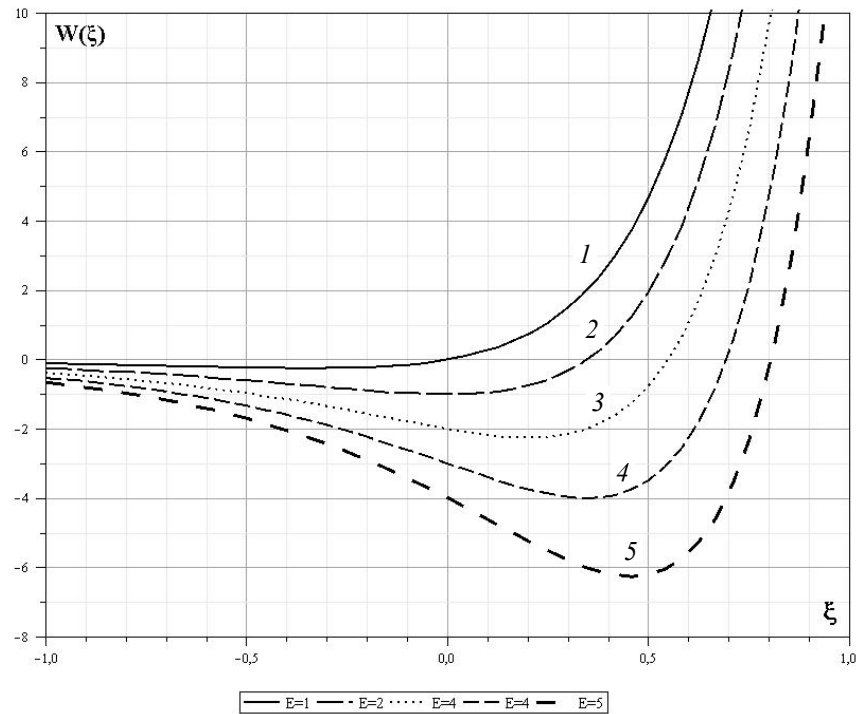


Рис. 3. Графики потенциальной энергии (22) в зависимости от параметра  $E$  для частицы в канале; кривые: 1 –  $E=1$ ; 2 –  $E=2$ ; 3 –  $E=3$ ; 4 –  $E=4$ ; 5 –  $E=5$

Уравнение (23) допускает разделение переменных.

Пусть  $\Phi = X(\xi)Y(\eta)$ , а  $\lambda^2$  постоянная разделения переменных, тогда

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}Y + \lambda^2 Y = 0, \quad -\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}X + (e^{4\xi} - Ee^{2\xi})X = (-\varepsilon - \lambda^2)X. \quad (24)$$

Первое уравнение в системе (24) соответствует свободному движению частицы, его решение – волны де Бройля. Второе уравнение описывает состояние квантовой частицы в одномерной яме, вид которой приведен на рис. 3. Волновые функции нового уравнения можно получить из решений для сингулярного осциллятора (20), используя связь между вещественными координатами до и после конформного отображения:  $r = e^\xi$ ,  $\varphi = \eta$ ,  $\Phi_n = \Psi_n(\xi, \eta)$ ;

$$\Phi_{nm}(\xi, \eta) = \sqrt{\frac{2(n!)}{\Gamma\left(n + \tilde{\lambda} + \frac{1}{2}\right)}} L_n^{\tilde{\lambda} - \frac{1}{2}}(e^{2\xi}) e^{\left(\tilde{\lambda} - \frac{1}{2}\right)\xi - \frac{e^{2\xi}}{2} + im\eta}. \quad (25)$$

Обратим внимание на следующее важное обстоятельство. Форма потенциала  $W(\xi, E)$  зависит от параметра  $E$ , являющегося энергией исходной системы. Поскольку эта энергия зависит от произвольного параметра  $\varepsilon$ , входящего в выражение для эффективного потенциала радиального уравнения (19), то его значения для каждого уровня меняются непрерывно. От номера уровня зависят лишь границы допустимых значений этого параметра. С другой стороны, волновые функции (25) зависят от номера уровня  $n$  исходной задачи, что указывает на существование вырождения уровней потенциала (22). Считая  $E$  фиксированным параметром потенциала  $W(\xi, E)$ , находим энергетические уровни новой системы:

$$\varepsilon_{nm} = \frac{1}{8} - m^2 + \frac{\left(E - 2n - \frac{1}{4}\right)^2}{2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (26)$$

Подставляя выражение (26) в (21), получим следующую связь между параметрами  $\tilde{\lambda}$  и  $E$ :

$$\tilde{\lambda} = E - 2n + \frac{1}{4}. \quad (27)$$

Волновые функции  $\Phi_{mn}(\xi, \eta)$  удовлетворяют следующим граничным условиям:  $\Phi_{mn} \rightarrow 0$  при  $\xi \rightarrow \pm\infty$ . С точки зрения реального применения данной задачи ее можно рассматривать как задачу о движении квантовой частицы в плоском канале с потенциальной энергией, изменяющейся в направлении, перпендикулярном каналу, по закону (22). Такая система может рассматриваться как аналог потенциальной ямы вблизи поверхности металла.

### Пример 3

Рассмотрим уравнение квантового гармонического осциллятора с линейными членами в потенциале:

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Psi + \left[ \varepsilon (x^2 + y^2) + \alpha x + \beta y \right] \Psi = E \Psi. \quad (28)$$

Перейдем к комплексным координатам  $z = x + iy$ ,  $z^* = x - iy$ , также введем комплексную постоянную  $\gamma = \frac{\alpha - i\beta}{2}$ , тогда уравнение примет следующий вид:

$$\frac{-\hbar^2}{2m} 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial z^*} \Psi + \left( \varepsilon z z^* + \gamma z + \gamma^* z^* \right) \Psi = E \Psi.$$

Разделим получившееся уравнение на  $z z^*$  и сделаем отображение  $\xi = \frac{z^2}{2}$ :

$$\frac{-\hbar^2}{2m} 4 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \xi^*} \Psi + \left( \frac{\gamma \sqrt{\xi} + \gamma^* \sqrt{\xi^*}}{\sqrt{2 \xi \xi^*}} - \frac{E}{2 \sqrt{\xi \xi^*}} \right) \Psi = -\epsilon \Psi.$$

Перейдем к новым декартовым координатам:  $\xi = \zeta + i\eta = |\xi| e^{i\varphi}$ :

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) V + \left( \sqrt{2} |\gamma| \frac{\cos\left(\frac{\varphi}{2} + \varphi_0\right)}{(\zeta^2 + \eta^2)^{\frac{1}{4}}} - \frac{E}{2\sqrt{\zeta^2 + \eta^2}} \right) V = \epsilon V, \quad (29)$$

где  $V = \Psi(\zeta, \eta)$ ,  $\varphi = \frac{\zeta}{\eta}$ ,  $\gamma = |\gamma| e^{i\varphi_0}$ . Соотношения между переменными до и после отображения:

$$x^2 - y^2 = 2\zeta, \quad xy = \eta.$$

Найдем волновые функции и энергетический спектр полученного уравнения, произведя отображение решений исходного уравнения. Решение исходной задачи:

$$E_n = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{4\epsilon^2}, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \Psi(x, y) = & C_{n_1} C_{n_2} e^{\frac{-m\omega}{2\hbar} \left[ \left( x + \frac{\alpha}{2\epsilon} \right)^2 + \left( y + \frac{\beta}{2\epsilon} \right)^2 \right]} \times \\ & \times H_{n_1} \left( \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \left( x + \frac{\alpha}{2\epsilon} \right) \right) H_{n_2} \left( \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \left( y + \frac{\beta}{2\epsilon} \right) \right), \end{aligned}$$

где  $C_n = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left( \frac{m\omega}{\pi \hbar} \right)$ . Волновые функции и энергии после отображения:

$$\epsilon_n = \pm \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2E - 2\hbar\omega(2n+1)}}. \quad (31)$$

Для получения волновых функций нового уравнения нужно сделать в старых волновых функциях следующую замену переменных:

$$x = \pm \sqrt{\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - \eta^2}}, \quad y = \pm \sqrt{-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - \eta^2}}.$$

График потенциала (29) для значений параметров  $\sqrt{2} |\gamma| = 200$ ,  $\varphi_0 = 42$ ,  $E = 40$  представлен на рис. 4. Подкоренное выражение в (31) должно быть положительным. Это возможно, если выполняется условие:  $E - \hbar\omega(2n+1) \geq 0$ . При минимальном  $n = 0$  получаем ограничение на значе-

ния параметра  $E$ :  $E \geq \hbar\omega$ . Тогда при фиксированном  $E$ :  $n \leq \frac{E}{2\hbar\omega} - \frac{1}{2}$ .  
Спектр энергий полученной системы представлен на рис. 5.

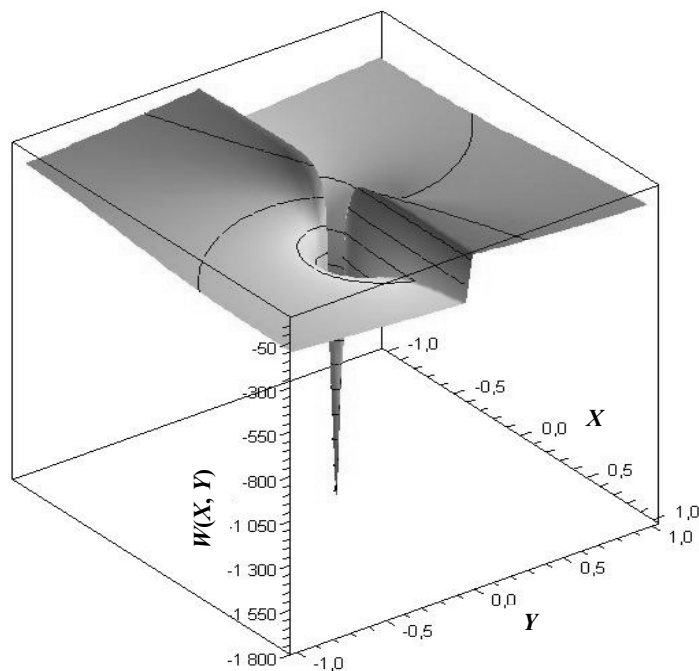


Рис. 4. График потенциальной энергии (29)  
для значений параметров:  $\sqrt{2}|\gamma| = 200$ ,  $\varphi_0 = 42$ ,  $E = 40$

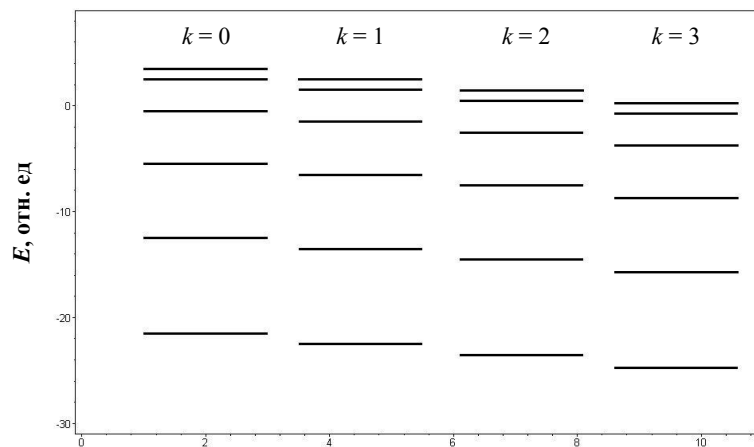


Рис. 5. Расположение энергетических уровней для потенциала (29) на рис. 4

#### 4. Метод преобразований Дарбу и конформные отображения

Рассмотрим расширение класса потенциалов, для которых решения могут быть построены с помощью конформных преобразований, если предварительно исходное уравнение Шредингера с простым потенциалом подвергнуть

преобразованию Дарбу [1, 2]. В качестве примера приведем построение потенциала, который связан с гармоническим осциллятором преобразованием Дарбу.

Уравнение Шредингера одномерного гармонического осциллятора массой  $m$  и с собственной частотой  $\omega$  имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x^2} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \psi_n = E_n \psi_n.$$

Решения этого уравнения можно записать в такой форме:

$$\psi_n(x) = C_n H_n(x/x_0) e^{-x^2/2x_0^2},$$

где  $x_0 = \sqrt{\hbar/m\omega}$ ,  $C_n = (2^n n!)^{-1/2} (\pi x_0)^{-1/4}$ ,  $H_n(x)$  – полиномы Эрмита:

$$H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x, H_2 = 2(2x^2 - 1), H_3(x) = 4x(2x - 3), \dots$$

Согласно методу преобразований Дарбу решениями уравнения Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi_n(x|k) + \left[ \frac{m\omega^2}{2} x^2 + U_k(x) \right] \varphi_n(x|k) = E \varphi_n(x|k),$$

где  $U_k(x) = \frac{\hbar^2}{m} \frac{\partial \xi_k}{\partial x}$ , являются функции:

$$\varphi_n(x|k) = \frac{\partial}{\partial x} \psi_n + \xi_k(x) \psi_n,$$

где

$$\xi_k(x) = -\frac{\partial}{\partial x} \ln \psi_k = x/x_0^2 - \frac{\partial}{\partial x} \ln H_k(x/x_0).$$

В частности,

$$\xi_1(x) = -\frac{\partial}{\partial x} \ln \psi_1 = x/x_0^2 - \frac{1}{x}, \quad \xi_2(x) = -\frac{\partial}{\partial x} \ln \psi_2 = x/x_0^2 - \frac{4x}{2x^2 - x_0^2}, \dots$$

Соответствующие добавочные потенциалы имеют такой вид:

$$U_1(x) = \frac{\hbar^2}{m} \left( \frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{x^2} \right), \quad U_2(x) = \frac{\hbar^2}{m} \left( \frac{1}{x_0^2} + \frac{4}{(2x^2 - 1)^2} \right), \dots$$

Преобразование Дарбу по каждой координате в отдельности при переходе к двумерным потенциалам приводит к уравнениям Шредингера (7) со следующими потенциалами:

$$U_1(x, y) = \frac{m\omega^2}{2} (x^2 + y^2) + \frac{\hbar^2}{m} \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) = (x^2 + y^2) \left[ \frac{m\omega^2}{2} + \frac{\hbar^2}{m} \frac{1}{x^2 y^2} \right],$$

$$U_2(x, y) = \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\hbar^2}{m} \left( \frac{1}{(2x^2 - 1)^2} + \frac{1}{(2y^2 - 1)^2} \right).$$

С помощью конформного отображения  $z \rightarrow \zeta = z^2 / 2$  в случае потенциала  $U_1(x, y)$  приходим к конформно-эквивалентному потенциалу вида

$$W_1 = -\frac{4\hbar^2}{m} \frac{1}{(\zeta - \zeta^*)^2} - \frac{2E}{|\zeta|} = \frac{\hbar^2}{m} \frac{1}{Y^2} - \frac{2E}{R}, \quad (32)$$

где  $R^2 = X^2 + Y^2$  и  $X, Y$  – декартовы координаты на комплексной плоскости после отображения. График потенциальной энергии  $W_1$  (32) для значений параметров  $\hbar^2 / m = 2, E = 500$  приведен на рис. 6.

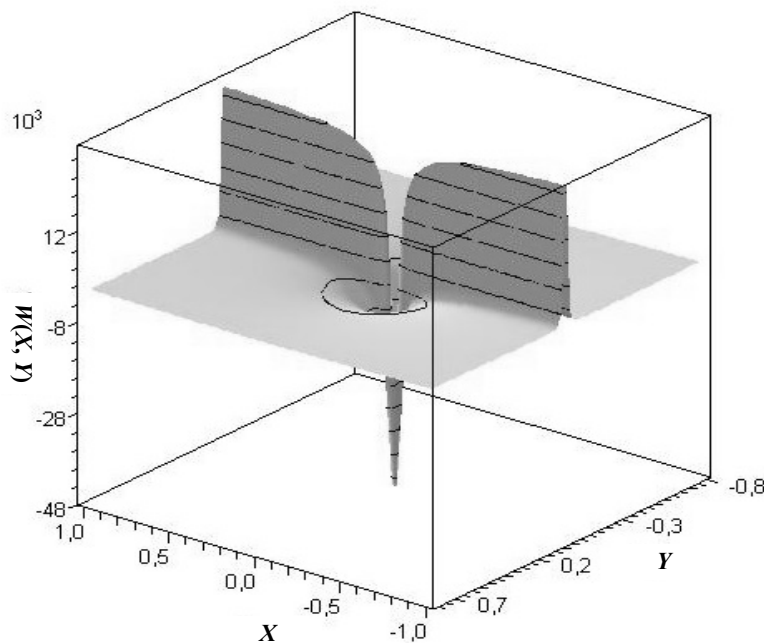


Рис. 6. График потенциальной энергии (32) для значений параметров  $\hbar^2 / m = 2, E = 500$

Для потенциала  $U_2(x, y)$ , используя конформное отображение, получаем следующий конформно-эквивалентный потенциал:

$$W_2 = -\frac{E_0}{2R} + \frac{8\hbar^2}{m} \frac{8X^2 + 4Y^2 - 4R + 1}{(4Y^2 - 4R + 1)^2}. \quad (33)$$

Энергетические уровни конформно-эквивалентного уравнения Шредингера находятся из условий:

$$E_0 = E - \frac{2\hbar^2}{x_0^2} = \hbar\omega(n_1 + n_2 - 1) = \text{const}, \quad \tilde{E}_n = \frac{m\omega^2}{2} = \frac{mE_0^2}{2\hbar^2} \frac{1}{(n_1 + n_2 - 1)^2}.$$

График потенциальной энергии  $W_2$  (33) для значений параметров  $E_0 = 3,1$ ;  $\frac{\hbar^2}{m} = 0,5$  приведен на рис. 7.

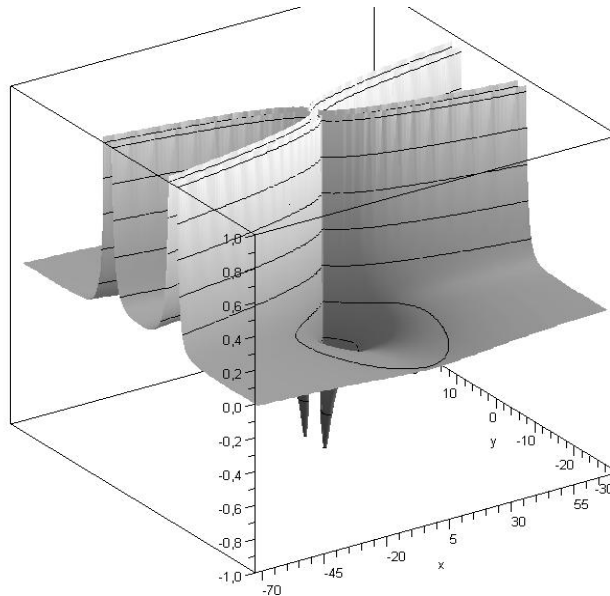


Рис. 7. График потенциальной энергии (33) для значений параметров  $E_0 = 3,1$ ;  $\frac{\hbar^2}{m} = 0,5$

Особенностью данного потенциала является наличие двух симметрично расположенных ям и четырех областей пространства, разделенных бесконечными потенциальными барьерами. Обратное конформное отображение дважды покрывает пространство гармонического осциллятора, что приводит к неопределенности – в какой из потенциальных ям находится частица при данной фиксированной энергии. Для энергий, соответствующих непрерывному спектру, неопределенность еще больше возрастает, поскольку в этом случае имеются уже четыре отдельных подобласти пространства для одной и той же энергии, разделенных бесконечными барьерами. Проблема состоит в том, что волновая функция определена сразу для всего пространства, хотя частица может находиться лишь в одной из подобластей. Эта ситуация является, фактически, вариантом проблемы Ааронова – Бома.

### Заключение

В работе развит метод конформных отображений в применении к двумерным квантовым системам. Результатом применения данного метода является расширение круга задач, для которых можно найти точные решения уравнения Шредингера. Для получения уравнений с новыми потенциалами

использовались задачи, для которых заранее известны точные решения. Для потенциалов после отображения найдены волновые функции и исследована структура энергетических уровней. Поскольку в результате конформных отображений двумерное пространство в форме комплексной плоскости может отображаться на часть комплексной плоскости, то для части полученных решений возникает дополнительная неопределенность в состоянии частицы, связанная с невозможностью по спектру предсказать – в какой части пространства находится частица. Этот факт и некоторые другие соображения указывают на то, что в результате конформных отображений появляются потенциалы со специфическими свойствами, которые имеют отношение к проблеме эффекта Ааронова – Бома [4], что также требует отдельного анализа. Количество исходных задач и отображений, дающих нужные уравнения, ограничено, поэтому для получения новых потенциалов можно использовать преобразование Дарбу с последующим конформным отображением. Это может существенно расширить класс потенциалов, для которых можно построить точные решения. Пример такого подхода приведен в данной статье.

### Список литературы

1. **Bargmann, V.** Determination of a central field of force from the elastic scattering phase shifts / V. Bargmann // *Phys. Rev.* – 1949. – Vol. 75. – P. 301–303.
2. **Захарьев, Б. Н.** Послушная квантовая механика: новый статус теории в подходе обратной задачи / Б. Н. Захарьев, В. М. Чабанов. – М. : Регулярная и хаотическая динамика, 2003. – 300 с.
3. **Лаврентьев, М. А.** Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – М. : Физматгиз, 1958. – 679 с.
4. **Aharonov, V.** / Aharonov V., Bohm D. // *Phys. Rev.* – 1959. – Vol. 115. – P. 485–491.
5. **Бейтмен, Г.** Высшие трансцендентные функции : пер. с англ. ; в 3-х т. / Г. Бейтмен, А. Эрдейн. – М. : Наука, 1966. – Т. 2. – 396 с.

### References

1. Bargmann V. *Phys. Rev.* 1949, vol. 75, pp. 301–303.
2. Zakhar'ev B. N., Chabanov V. M. *Poslushnaya kvantovaya mekhanika: novyy status teorii v podkhode obratnoy zadachi* [Obedient quantum mechanics: new status of theory in approach of the inverse problem]. Moscow: Regul'yarnaya i khaoticheskaya dinamika, 2003, 300 p.
3. Lavrent'ev M. A., Shabat B. V. *Metody teorii funktsiy kompleksnogo peremennogo* [Methods of complex variable function theory]. Moscow: Fizmatgiz, 1958, 679 p.
4. Aharonov V., Bohm D. *Phys. Rev.* 1959, vol. 115, pp. 485–491.
5. Beytmen G., Erdelyi A. *Vysshie transtsendentnye funktsii: per. s angl.; v 3-kh t.* [Higher transcendental functions: translation from English; in 3 volumes]. Moscow: Nauka, 1966, vol. 2, 396 p.

### Журавлев Виктор Михайлович

доктор физико-математических наук,  
профессор, кафедра теоретической  
физики, Ульяновский государственный  
университет (Россия, г. Ульяновск,  
ул. Льва Толстого, 42)

E-mail: zhvictorm@gmail.com

### Zhuravlev Viktor Mikhaylovich

Doctor of physical and mathematical  
sciences, professor, sub-department  
of theoretical physics, Ulyanovsk  
State University (42 Lva Tolstogo  
street, Ulyanovsk, Russia)

**Морозов Виталий Михайлович**

студент, Ульяновский государственный  
университет (Россия, г. Ульяновск,  
ул. Льва Толстого, 42)

E-mail: aielers@rambler.ru

**Morozov Vitaliy Mikhaylovich**

Student, Ulyanovsk State University  
(42 Lva Tolstogo street, Ulyanovsk, Russia)

---

УДК 539.182

**Журавлев, В. М.**

**Метод конформных отображений в теории двумерных квантовых систем** / В. М. Журавлев, В. М. Морозов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2014. – № 3 (31). – С. 159–178.